Наименьшее по модулю ненулевое собственное значение лапласиана равно $-2/(3\gamma)$ и имеет кратность 25.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамс Дж. *Лекции по группам Ли.* – М.: Наука, 1979. – 144 с.

2. Берестовский В. Н., Свиркин В. М. *Оператор Лапласа на однородных нормальных римановых многообразиях* // Матем. труды. – 2009. – Т. 12. – № 2. – С. 3-40.

3. Берестовский В. Н., Свиркин В. М. *Спектр оператора Лапласа на компактных односвязных простых группах Ли ранга два* // Ученые записки Казан. гос. ун-та. – 2009. – Т. 151. – № 4. – С. 15-35.

4. Дынкин Е. Б., Онищик А. Л. *Компактные группы Ли в целом* // Усп. матем. наук. – 1955. – Т. 10. – № 4 (66). – С. 3-74.

С. В. Селиванова

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

s_seliv@yahoo.com

КАСАТЕЛЬНЫЙ КОНУС К СУБРИМАНОВУ ПРОСТРАНСТВУ В НЕРЕГУЛЯРНОЙ ТОЧКЕ, В УСЛОВИЯХ МИНИМАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Субриманова геометрия моделирует задачи неголономной механики подобно тому, как риманова геометрия моделирует задачи классической (голономной) механики. При линеаризации физических задач необходимо приблизить исходное пространство некоторым более простым объектом. В случае риманова многообразия роль такого объекта играет касательное (евклидово) пространство. Доклад посвящен обсуждению аналогичного вопроса для субриманова пространства при предельно общих предположениях.

Приведем сначала "классическое" определение субриманова пространства (другими словами, многообразия с субримановой структурой или пространства Карно – Каратеодори).

Определение 1. *Пусть* $\mathbb{M}$ *— связное гладкое многообразие размерности* $\dim \mathbb{M} = N$. *Будем говорить, что на* $\mathbb{M}$ *задана субриманова структура, если в касательном расслоении* $T\mathbb{M}$ *выделено "горизонтальное" подрасслоение* $H\mathbb{M}$, *задающее фильтрацию* $T\mathbb{M}$ *следующим образом:*

$$H\mathbb{M} = H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots \subseteq H_r = T\mathbb{M}, \tag{1}$$

где

$$H_k = \operatorname{span}\{H_{k-1}, [H_{k-1}, H_1]\}. \tag{2}$$

При этом предполагается, что горизонтальное подрасслоение $H\mathbb{M}$ *локально может быть задано с помощью гладких горизонтальных базисных векторных полей* $\{X_1, \ldots, X_m\} \in C^\infty$ *на* $U \subseteq \mathbb{M}$, *где* $m \leqslant N$.

Минимальное число r *элементов фильтрации* (1) *называется глубиной субриманова пространства* $\mathbb{M}$.

Отметим, что при $m = N$ с помощью векторных полей $\{X_1, \ldots, X_m\}$ можно задать на U риманову геометрию. Напомним также, что произвольное векторное поле может быть представлено в виде дифференциального оператора первого порядка $X_i = \sum\limits_{j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$, действующего на функцию $f \in C^\infty(\mathbb{M})$, а гладкость векторного поля X_i определяется гладкостью его координатных функций $a_{ij}(x)$. Коммутатор двух векторных полей определяется по формуле $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$ и также является векторным полем. Под коммутатором подрасслоений в (2) подразумевается линейная оболочка всевозможных коммутаторов векторных полей, порождающих эти подрасслоения. Условия (1), (2) равносильны условию Хёрмандера [1] о порождении всего касательного пространства в каждой точке коммутаторами горизонтальных векторных полей или, другими словами, условию вполне неинтегрируемости горизонтального подрасслоения.

Исследование внутренних вопросов субримановой геометрии (в частности, вопроса о касательном конусе) важно в теории субэллиптических уравнений, неголономной теории управления, контактной геометрии, гармоническом анализе, термодинамике, квантовой механике, нейробиологии и т. д.

Определение 2. *Точка $p \in \mathbb{M}$ субриманова пространства называется регулярной, если существует окрестность V этой точки, в которой* $\dim(H_k(u)) = \mathrm{const}$, *для всех $u \in V$, $k = 1, \ldots, r$. В противном случае точка p называется нерегулярной.*

При "классическом" определении известно, что любые две точки субриманова пространства можно соединить кривой, касательный вектор к которой лежит в горизонтальном подрасслоении (теорема Рашевского – Чоу). Этот факт позволяет ввести на многообразии $\mathbb{M}$ внутреннюю субриманову метрику d_c (не эквивалентную римановой) как точную нижнюю грань длин всех горизонтальных кривых, соединяющих данные точки. Таким образом, $(\mathbb{M}, d_c)$ — метрическое пространство.

Для метрических пространств М. Громов в 1981 г. ввел понятие касательного конуса, обобщающее понятие касательного пространства к многообразию. Известно [2, 6], что в субримановом случае касательный конус по Громову — это нильпотентная стратифицированная группа Ли (в случае регулярных точек) либо фактор-пространство такой группы по ее подгруппе изотропии (для нерегулярных точек).

Недавно найденные приложения субримановой геометрии привели к необходимости рассмотрения существенно более общих предположений, когда:

1) горизонтальные векторные поля имеют минимально возможную гладкость $C^{r-1,\alpha}$ (см., например, [3, 4], где доказана теорема Рашевского – Чоу при этих предположениях);

2) вместо условия Хёрмандера рассматривается более слабое условие (см., например [3, 5]), а именно: фильтрация (1) касательного расслоения не задается горизонтальным подрасслоением, а обладает более слабым свойством

$$\operatorname{span}\{H_{k-1}, [H_{k-1}, H_1]\} \subseteq H_k.$$

Важно отметить, что в этом последним случае теорема Рашевского – Чоу, вообще говоря, неверна, и внутренней метрики d_c может не существовать. При этом возможно введение квазиметрик (функций расстояния, удовлетворяющих обобщенному неравенству треугольника, с некоторой константой) [5], которые для классического случая эквивалентны метрике d_c.

В работе [3] предложен новый подход, позволяющий доказать для случая регулярных точек аналоги всех классических теорем субримановой геометрии в предположениях 1), 2), без применения теоремы Рашевского – Чоу, формулы Кэмпбелла – Хаусдорфа, теоремы Громова о нильпотентизации.

Нами построена [7] теория сходимости для квазиметрических пространств, которая включает в качестве частного случая теорию Громова для метрических пространств и позволяет ввести корректное понятие касательного конуса к квазиметрическому пространству. Отметим, что прямолинейное обобщение теории Громова на квазиметрические пространства, по ряду причин, невозможно.

В рамках построенной в [7] теории и с использованием результатов [3] нами доказано, что касательным конусом к квазиметрическому пространству Карно – Каратеодори в регулярной точке является нильпотентная градуированная группа Ли (в отличие от стратифицированной группы в "классическом" случае).

В настоящей работе мы доказываем, что в нерегулярной точке касательным конусом, при предположениях 1), является фактор-пространство такой группы по ее подгруппе изотропии. При этом методы доказательства существенно отличаются от методов "классической" субримановой геометрии. Наш подход дает новое доказательство теоремы о касательном конусе и в "классической" ситуации.

Работа выполнена при ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (госконтракт П2224).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hörmander L. *Hypoelliptic second order differential equations.* // Acta Math. – 1967. – V. 119, No 3-4. – P. 147-171.

2. Bellaiche A. *The tangent space in sub-Riemannian geometry.* // Sub-Riemannian Geometry, Progress in Mathematics – Birckhäuser, 1996. – No 144. – P. 1-78.

3. Karmanova M., Vodopyanov S. *Geometry of Carno-Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas* // Analysis and Mathematical Physics. Trends in Mathematics, Birckhäuser, 2009. – P. 233-335.

4. Bramanti M., Brandolini L., Pedroni M. *Basic properties of nonsmooth Hörmander vector fields and Poincarés inequality* // arXiv:0809.2872 – 2009.

5. Nagel A., Stein E. M., Wainger S. *Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties.* // Acta Math. – 1985. – No 155. – P. 103-147.

6. Rotshild L.P., Stein E.M. *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups* // Acta Math. –1946. –V. 137. – P. 247-320.

7. Селиванова С. В. *Касательный конус к квазиметрическому пространству с растяжениями* // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51. – № 2. – С. 388-403.

В. В. Сидоров

Вятский государственный гуманитарный университет, schools@chgk43.ru

О СТРОЕНИИ ИЗОМОРФИЗМОВ РЕШЕТОК ПОДАЛГЕБР ОДНОПОРОЖДЕННЫХ ПОДАЛГЕБР ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть X — топологическое пространство и $\mathbb{R}^+$ — множество всех неотрицательных действительных чисел. Множество всех непрерывных неотрицательных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения функций образует полукольцо $C^+(X)$. Под *полукольцом* понимается алгебраическая система $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$, в которой $\langle S, +, 0\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа, выполняются законы дистрибутивности операции умножения относительно сложения, тождественно $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ для